令和 4 年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60 分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\tan\alpha = 5$ のとき $\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

問 2 n を正の整数とする。n を二進法で表すと 2022 桁である。このとき，n を十進法で表すと何桁になるか。
ただし $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

問 3 a，b を実数とする。整式 $f(x)$ と整式 $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = x^4 + ax^2 - 2x + 3,\quad g(x) = x^2 + x + b$$

と定める。$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるような実数の組 (a, b) をすべて求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

$\boxed{2}$ 座標平面上の２つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad C_2 : y = 2x^2 - 4x + 9$$

について，次の問いに答えよ。（50点）

問１　放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線は２つ存在する。放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線の方程式を２つとも求めよ。

問２　問１で求めた２つの直線および放物線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問１	
問２	
小計	

2 解答欄

問1

問2

<table>
<tr><td colspan="2">採　点　欄</td></tr>
<tr><td colspan="2">数　　学 乙</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>小
計</td><td></td></tr>
</table>

受 験 番 号

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{5}{13}$

問 2 n は二進法で表すと 2022 桁なので $2^{2021} \leqq n < 2^{2022}$ である。よって

$$2021\log_{10}2 \leqq \log_{10}n < 2022\log_{10}2 \Rightarrow 608.321 \leqq \log_{10}n < 608.622$$

なので $608 \leqq \log_{10}n < 609$ すなわち $10^{608} \leqq n < 10^{609}$ が成り立つ。従って n を十進法で表すと 609 桁。

問 3 $f(x)$ を $g(x)$ で割ると

$$f(x) = g(x)\bigl(x^2 - x + (a-b+1)\bigr) + \bigl((b-2)-(a-b+1)\bigr)x + 3 - b(a-b+1)$$

となる。$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れる必要十分条件は，次の 2 つの等式

$$\begin{aligned} b-2 &= a-b+1 \quad \cdots\cdots ① \\ 3 &= b(a-b+1) \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

がともに成り立つことである。ここで式 ① を式 ② に代入すると，$3 = b(b-2)$ となるのでこれを解くと $b = 3,\ -1$ である。式 ① より，$a = 2b-3$ である。したがって式 ① と式 ② がともに成り立つならば，実数の組 (a,b) は $(3,3)$ か $(-5,-1)$ のいずれかである。一方で (a,b) が $(3,3)$ あるいは $(-5,-1)$ であるならば，式 ① と式 ② をともに満たすので，求める実数の組は $(3,3)$ と $(-5,-1)$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　点 $(a, -a^2+2a)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y = (-2a+2)(x-a) - a^2 + 2a \cdots\cdots ①$$

である。同様に，点 $(b, 2b^2-4b+9)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y = (4b-4)(x-b) + 2b^2 - 4b + 9 \cdots\cdots ②$$

である。① と ② が同一の直線を表すための必要十分条件は

$$-2a+2 = 4b-4 \cdots\cdots ③$$
$$a^2 = -2b^2+9 \cdots\cdots ④$$

がともに成り立つことである。③ より，$a = -2b+3$。これを ④ に代入して $b = 0, 2$。$b = 0$ のとき $a = 3$，$b = 2$ のとき $a = -1$ である。よって求める直線の方程式は $y = -4x+9$ および $y = 4x+1$

問 2　直線 $y = 4x+1$ と放物線 C_1 の接点の x 座標は -1 であり，直線 $y = -4x+9$ と放物線 C_1 の接点の x 座標は 3 である。また，直線 $y = 4x+1$ と 直線 $y = -4x+9$ の共有点の x 座標は 1 である。よって求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (4x+1-(-x^2+2x))\,dx + \int_{1}^{3} (-4x+9-(-x^2+2x))\,dx \\
=&\int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)\,dx + \int_{1}^{3} (x^2-6x+9)\,dx \\
=&\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{1}^{3} \\
=&\frac{16}{3}
\end{aligned}$$